

TD n°9: Représentations conformes et révisions

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-3-5-6-7. Les exercices marqués d'un $\clubsuit^1$ sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Représentations conformes.

Exercice 1. Des équivalences conformes.

On note $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \alpha\}$ où $0 < \alpha \leq \pi$. Démontrer que les fonctions holomorphes suivantes sont des équivalences conformes, et expliciter leurs inverses :

1. La transformation $z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}$ de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{H}$.
2. Pour $0 < \alpha\beta \leq \pi$, la fonction $z \mapsto z^\beta$ de S_α vers $S_{\alpha\beta}$.
3. La transformation de Koebe $K(z) := \frac{z}{(1-z)^2}$ de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$.
4. La transformation $L(z) := \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ de $\mathbb{D}$ vers $\{w \in \mathbb{C} : |\Im w| < \pi/2\}$.
5. La transformation de Joukowski $J(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ vers $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Exercice 2. Unicité dans le théorème de la représentation conforme.

1. Démontrer qu'il existe un unique biholomorphisme φ de $\mathbb{D}$ qui vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. Soient U, V deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ biholomorphes à $\mathbb{D}$, $u \in U, v \in V$. Démontrer qu'il existe un unique biholomorphisme $f : U \rightarrow V$ qui envoie u sur v et vérifie $f'(u) \in \mathbb{R}_{>0}$.
Si $V = \mathbb{D}, v = 0$, on appelle $\frac{1}{f'(u)}$ le rayon conforme de U en u , noté $R(U, u)$.
3. Calculer les rayons conformes suivants :

- (a) $R(\mathbb{D}(0, r), 0), R(\mathbb{D}(0, 2), 1)$
- (b) $R(\mathbb{H}, i)$
- (c) $R(U, 0)$ avec $U = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Indication : pour trouver une équivalence conforme dans ce dernier exemple, on pourra penser à la transformation de Joukowski.

Exercice 3. Représentations conformes entre couronnes.

On pose $C(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

1. Soient $1 < R_1, R_2$ et supposons qu'on a un biholomorphisme $f : C(1, R_1) \rightarrow C(1, R_2)$. Démontrer que quitte à considérer R_2/f , on peut supposer que $|f| \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow 1$ et $|f| \rightarrow R_2$ quand $|z| \rightarrow R_1$.
2. En déduire que la fonction harmonique $\log |f| - \frac{\log(R_2)}{\log(R_1)} \log |z|$ s'étend au bord de $C(1, R_1)$ et y est nulle.
3. En considérant une détermination locale du logarithme de f au voisinage de 1, démontrer qu'on doit avoir, au moins sur un voisinage de 1 dans $C(1, R_1)$, $f(z) = Cz^\alpha$ où on spécifiera α .
4. Démontrer que si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, il n'existe pas de fonction sur $C(1, R)$ qui vérifie $f'/f = \frac{\alpha}{z}$.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une équivalence conforme de $C(r_1, R_1)$ vers $C(r_2, R_2)$.
6. Expliciter les biholomorphismes de $C(r, R)$ et démontrer que le groupe des biholomorphismes est isomorphe au produit semi-direct

$$\mathbb{T} \rtimes \{\pm 1\}.$$

¹Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Exercice 4. Les polynômes de Faber

Soit K un compact connexe du plan ayant au moins deux points et tel que $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ soit connexe. On suppose pour plus de simplicité que K contient 0.

1. Montrer que Ω est biholomorphe à $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, puis à $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.
2. Expliciter une telle représentation conforme dans le cas où $K = [-1, 1]$.
3. Notons $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ la représentation conforme obtenue. Démontrer que Φ a un pôle simple à l'infini. On définit alors le n -ième *polynôme de Faber associé à K* , F_n comme étant la partie polynomiale de Φ^n i.e.

$$F_n(z) = \Phi(z)^n + O_\infty(1/z).$$

4. Calculer les polynômes de Faber dans le cas $K = \overline{\mathbb{D}}(0, r)$ avec $r > 0$.
5. Démontrer que pour $z \in K$, et n'importe quel contour simple C^1 par morceaux dans Ω , on a

$$F_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Phi(\zeta)^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

6. Soit Ψ l'application réciproque de Φ . Démontrer que si $z \in K$ et γ est un contour dans Ω tel que $|w| > \sup_t |\Psi(\gamma(t))|$, alors :

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \frac{1}{w - \Phi(\zeta)} d\zeta$$

et en déduire que pour tout $|w| > 1$, on a

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n \geq 0} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$$

avec convergence uniforme sur $|w| \geq 1 + \varepsilon$.

7. Si U est un ouvert connexe contenant K et si $f \in \mathcal{O}(U)$, montrer que f se développe sur K en série de polynômes de Faber associés à K et que cette série converge uniformément sur K .

Exercices divers.

Exercice 5. Une fonction analytique sur le disque.

Démontrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ définit une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ qui diverge au voisinage de $e^{\frac{2ik\pi}{2^m}}$ pour $k \in \mathbb{Z}, m \geq 0$.

Exercice 6. Primitives et logarithmes.

1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(a, \varepsilon)$. Démontrer que f admet une primitive, donnée par

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta.$$

où l'intégrale est prise sur n'importe quel chemin de a à z dans le disque.

2. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, f une fonction holomorphe sur U . Supposons que pour γ chemin C^1 par morceaux dans U , la quantité $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ ne dépend que de $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. Démontrer que

$$z \mapsto \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

définit bien une fonction sur U , indépendamment du chemin de a à z choisi. Démontrer que cette fonction est holomorphe, de dérivée f .

3. En déduire qu'une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ admet une primitive si et seulement si $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ ne dépend que des extrémités de γ .

4. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ ne s'annulant pas. Démontrer que si une primitive L de f'/f existe, alors elle vérifie $e^{L(z)} = Af(z)$, pour un certain $A \in \mathbb{C}^*$.
5. Soit U simplement connexe, et $f \in \mathcal{O}(U)$ ne s'annulant pas. Démontrer qu'il existe $L \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f(z) = e^{L(z)}$.

Exercice 7. Formules d'aire.

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une fonction analytique sur $\mathbb{D}$, qu'on suppose bornée et injective.

1. Calculer le déterminant jacobien de f vue comme un difféomorphisme de $\mathbb{D}$ sur son image $f(U)$.
2. Démontrer la formule de l'aire

$$\text{Aire}[f(\mathbb{D})] = \pi \sum_{n \geq 0} n |a_n|^2.$$

On rappelle la formule de Stokes holomorphe-antiholomorphe : pour f, g fonctions C^1 sur K compact à bord C^1 par morceaux, on a

$$\int_{\partial K} f dz + g d\bar{z} = 2i \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx dy.$$

3. Soit K un compact à bord C^1 par morceaux. Démontrer que

$$\text{Aire}[K] = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \bar{z} dz.$$

4. Soit à présent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ une fonction analytique au voisinage du cercle γ_r de rayon r , injective sur γ_r . Soit K_r le compact du plan dont le bord est $f(\gamma_r)$. Démontrer l'égalité

$$\text{Aire}[K_r] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |a_n|^2 r^{2n}.$$

Exercice 8. Un calcul de somme.

1. Démontrer que $\tan(x + iy) = \frac{\sin(2x) + i \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$ puis démontrer que les solutions de l'équation $\tan(z) = z$ sont toutes réelles. On note les solutions strictement positives $(\lambda_n)_{n \geq 1}$.
2. On pose $f(z) = \sin(z) - z \cos(z)$. Démontrer en intégrant $\frac{f'(z)}{z^2 f(z)}$ sur un contour bien choisi que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10}.$$

3. Démontrer que pour tout $k \geq 1$ entier, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n^{2k}} \in \mathbb{Q}.$$

4. Démontrer, pour $a \in [-1, 1]$, l'égalité

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2 \sin(\lambda_n)} = \frac{5a^3 - 3a}{20}.$$

Exercice 9. Les fonctions hypergéométriques

Pour $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0})^q$, on définit

$${}_pF_q[\mathbf{a}; \mathbf{b} | z] = \sum_{n \geq 0} \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{n! \prod_{i=1}^q (b_i)_n} z^n$$

où $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$.

1. Calculer le rayon de convergence de ${}_pF_q$ en fonction de p, q . On pensera à distinguer si $a_i \in \mathbb{Z}$ ou non.
2. Exprimer les fonctions $e^z, \frac{1}{1-z}, -\log(1-z), \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta$ avec des fonctions hypergéométriques.
3. On pose $\theta_z = z\partial_z$. Démontrer que

$$\theta_z \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} n a_n z^n.$$

4. Soient $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$. Démontrer qu'une série entière $y(z) = \sum a_n z^n$ est solution (formelle) de l'équation différentielle

$$P(\theta_z)y - zQ(\theta_z)y = 0$$

si et seulement si

$$P(n)a_n = Q(n-1)a_{n-1}$$

pour tout $n \geq 0$ (où l'on prend par convention $a_{-1} = 0$). En déduire que ${}_pF_q[\mathbf{a}; \mathbf{b}|z]$ est solution de l'équation différentielle

$$\theta_z(\theta_z + b_1 - 1) \dots (\theta_z + b_q - 1)y(z) = z(\theta_z + a_1) \dots (\theta_z + a_p)y(z).$$

5. Démontrer que

$$(1-z)^{-\alpha} = {}_1F_0[\alpha | z]$$

et en déduire la formule

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1[a, b; c | z] = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

pour $z \notin \mathbb{R}_{\geq 1}$, $\Re(c) > \Re(b) > 0$. On rappelle la formule, pour $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$:

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

6. Démontrer la formule de transformation de Pfaff :

$${}_2F_1[a, b; c | z] = (1-z)^{-a} {}_2F_1 \left[a, c-b; c \mid \frac{z}{z-1} \right].$$